Potenzrechnung

VL: Finitismus

PD Dr. Timm Lampert

Humboldt Universität Berlin

Überblick

1. Arithmetik
   - Gegenüberstellung extensionaler Ansatz vs. algorithmische Analyse (Rekapitulation und Vertiefung):
     - Rechengesetzen
     - Zahlerweiterung
2. Potenzrechnung
   - Erweiterung um √
     - extensionaler Ansatz vs. algorithmische Analyse
   - Potenzgesetze und Ω-Kalkül

Gegenüberstellung

Extensionale Interpretation:

$$\varphi \rightarrow \mathfrak{I}(\varphi)$$

Algorithmische Analyse

$$\varphi =_{\text{Def.}} \varphi^*$$

	Extensionale Interpretation	Algorithmische Analyse
φ	Funktionsausdruck	Rechenausdruck
φ_{AL}	$\mathfrak{I}(\varphi_{AL})$: Wahrheitsfunktion	$\varphi^*_{AL:}$ Satzform
Logische Wahrheit	Allgemeingültigkeit	Formale Eigenschaft (Tautologie)
φ	$\mathfrak{I}(\varphi_{A})$: numerische Funktion	φ^*_{A}: Zahl (Form)
Arithmetische Gleichheit	Aussagefunktion	Formale Eigenschaft (Typidentität)
Beweis	Logisch-axiomatisch	Algorithmische Analyse
Entscheidbarkeit	Rekursionstheorie	Algorithmische Analyse

Rechengesetze

Rechengesetze folgen aus den Definitionen:

1. Rechnen mit 0
2. Rechengesetze mit -
3. Potenzgesetze
4. Entscheidungen von Gleichungen ($\mathbb{Q}$ -Algorithmus)

$\Rightarrow$ keine ad-hoc Gesetze bzw. ad-hoc Eigenschaften

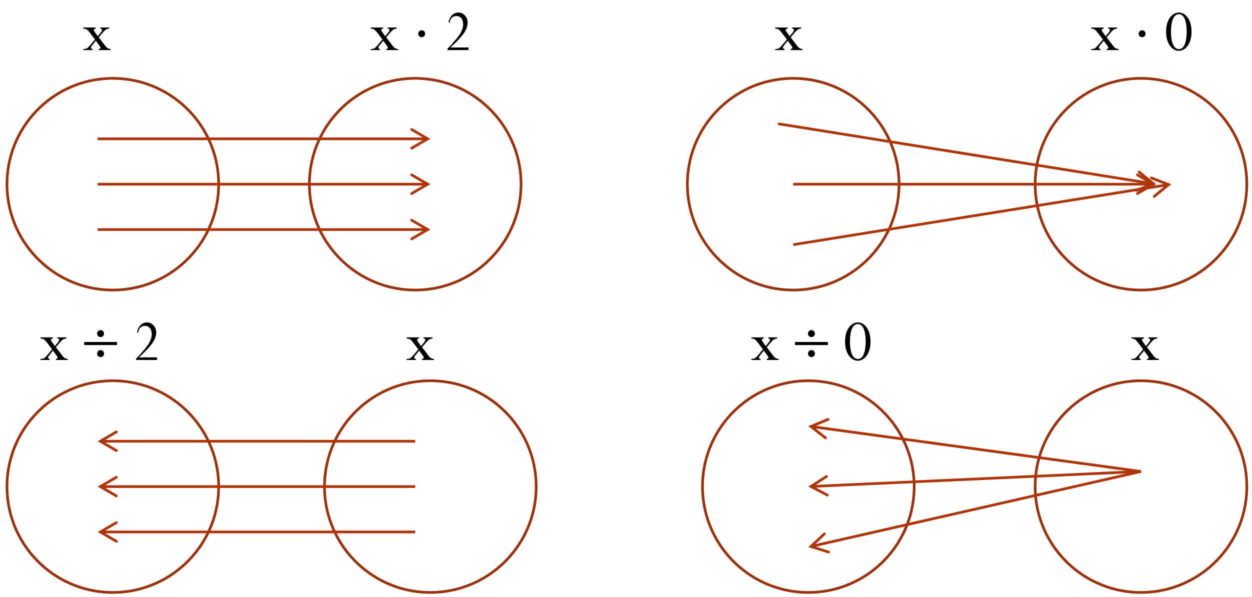
$\Rightarrow$ keine Fallunterscheidungen (rekursive Def.),

$\Rightarrow$ keine impliziten oder mengentheoretischen Definitionen,

$\Rightarrow$ keine Funktionen

$\Rightarrow$ keine Axiome

Teilen durch 0
Extensionale Argumentation



$$0 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \mathbf{0 \div 2} = 0$$
$$1 \cdot 2 = 2 \Rightarrow \mathbf{2 \div 2} = 1$$
$$2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow \mathbf{4 \div 2} = 2$$

$$0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{0 \div 0} = 0$$
$$1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{0 \div 0} = 1$$
$$2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{0 \div 0} = 2$$
$$\ldots$$
$$0 = 1 = 2 = \ldots ??$$

Teilen durch 0
Algorithmische Analyse

$$a \div 0 \Rightarrow_{\text{Def.}} S^{a}0 \div S^{0}0 \Rightarrow_{\text{Def.}} S^{a\,\bar{0}}0:{}^{0} \neq \Omega.$$

- 0 im Exponenten (Zähler) einer Operation ist keine Operation und damit nicht umkehrbar.
- 0-malige Anwendung einer Operation heißt, keine Operation anzuwenden / auszuführen. 0 im Zähler zählt nicht, sondern markiert den Anfangspunkt allen Zählens. Mal 0 nehmen „löscht jede beliebige Rechnung aus“.
- Es ist unmöglich, durch 0 zu teilen, weil x × 0 die Form $\Omega^{0}\xi$ hat und $\Omega^{0}\xi = \xi$.

0^0
Extensionale Argumentation

```
In[15]:= Limit[x^0, x -> 0]

Out[15]= 1

In[16]:= Limit[0^x, x -> 0]

Out[16]= 0

In[17]:= 0^0

         Power::indet : Indeterminate expression 0^0 encountered. >>

Out[17]= Indeterminate
```

0^0
Algorithmische Analyse

$$0^0 = 1:\ S^0 0^{\wedge S^0 0} =_{\text{Def.}\wedge} S^{0^0} 0 =_{\text{Def.}^0} S0$$

- Es wird das 0-malige Zählen von S nicht gezählt.
- Es wird nicht S nicht gezählt.
- Im Unterschied zu 0^0 wird in $S^{0^0}0$ die Bedeutung von 0^0 unmissverständlich zum Ausdruck gebraucht.
- Grenzwertargumente sind Teil der Analysis, nicht von $\mathbb{Q}$ bzw. Potenzrechnung.

--a= a
Unterschiedliche Argumente

- Argument der konstanten Abstände

$3\times-1=-3,\ 2\times-1=-2,\ 1\times-1=-1,\ 0\times-1=0,\ -1\times-1=1\ \ldots$

$\Rightarrow$ Permanenzprinzip

- Argument unter Voraussetzung von Axiomen (DIS, $a\times0=0$)

$-a + a = 0 \Rightarrow (-a + a)\times b = 0\times b \Rightarrow -a\times b + a\times b = 0$

$-b + b = 0 \Rightarrow (-b + b)\times -a = 0\times -a \Rightarrow -a\times -b + -a\times b = 0$

$\Rightarrow$ axiomatisch

- Argument durch Widerspruch

$-1 \times -1 = -1 \ |\div -1$

$-1 = 1$

$\Rightarrow$ petitio principii

Darum!

„Prof. Martin Stein lehrt an der Uni Münster Didaktik der Mathematik und hat eine ‚klare' Antwort auf die Frage, warum minus mal minus plus ergibt: ‚Darum!'"

Aus:WDR, „Die kleine Anfrage", Sendedatum 4.11.2010

--a= a
Algorithmische Analyse

$$--a = a:\ --S^{\mu}0 =_{Def.-} -\bar{S}^{\mu}0 =_{Def.-} \bar{\bar{S}}^{\mu}0 =_{U2} S^{\mu}0$$

- Umkehrung der Umkehrung einer Operation ergibt die Operation.
- Diese Erklärung setzt Operationen (nicht Funktionen) voraus.

Sprach- und Zahlerweiterung

$$\mathbb{N}\ :\ SS0 =_{\text{Def.}} S^{SS0}0 =_{\text{Def.}} S^{SS0\ S0}0$$

$$\mathbb{Z}\ :\ -\ S^{SS0}0 =_{\text{Def.}} \bar{S}\bar{S}S^{0}0 =_{\text{Def.}} S^{\bar{S}\bar{S}0\ S0}0$$

$$\mathbb{Q}\ :\ S^{S0}0 \div S^{SS0}0 =_{\text{Def.}} S^{S0\ \overline{SS0}}0$$

- $\sqrt{}$ als Umkehroperation zu ^:

$\Rightarrow$ Wie sieht Sprach- und Zahlerweiterung aus?

$\Rightarrow$ Wie kann das Rechnen mit neuen Ausdrücken im Rahmen des Ω-Kalküls analysiert werden?

Überblick

Potenzrechnung: Einführung von Radikalen durch Umkehroperation √

1. √ als Funktion und als Operation
2. Potenzgesetze als Folge der Verallgemeinerung des $\mathbb{Q}$ -Algorithmus

Algebra: Einführung von „x“

1. *x* als *Variable* für rationale Zahlen: Algebra und Arithmetik
2. *x* als *Unbestimmte*: Algebra als Buchstabenrechnung
3. *x* als *Unbekannte*: Einführung algebraischer Zahlen

Rationale Exponenten

- Spracherweiterung: φ kann gegenüber $\mathbb{Q}$ -Gleichungen rationale Exponenten enthalten, z.B.:

$$2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{2}}$$

- $\mathfrak{I}(\varphi)$: (eindeutige) Funktionsaudrücke
- φ_F: mehrdeutige Rechenausdrücke

√ als *Funktion*

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2$$

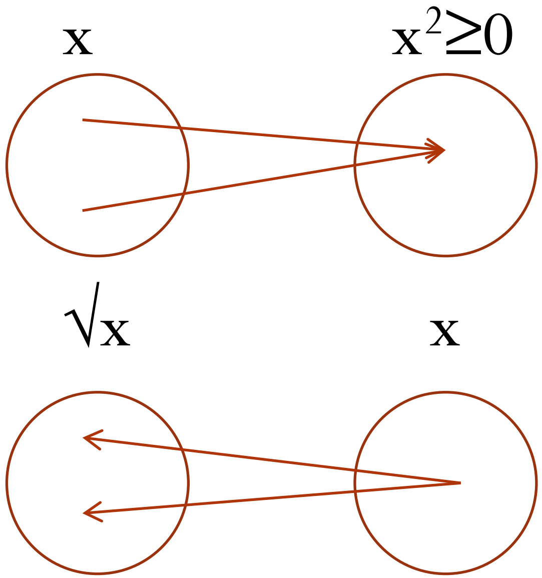
Aber:

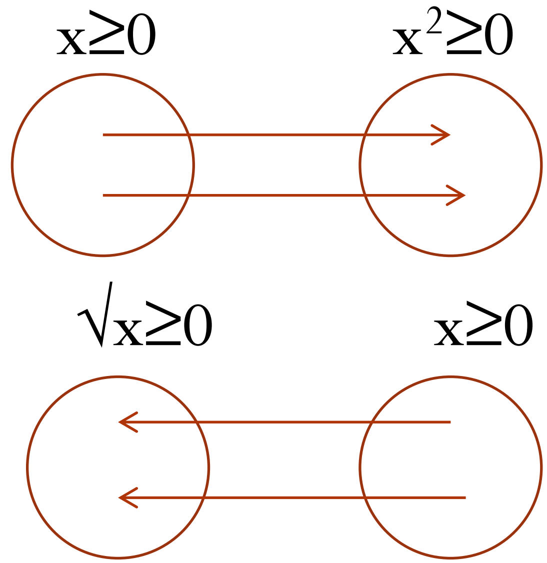
$$\sqrt{4} = 2,\ \sqrt{4} \neq -2$$

Also:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Extensionale Argumentation





$2^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$

$(-2)^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = -2$

$\Rightarrow 2 = -2$

$2^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$

$3^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$

Potenzgesetze: Einschränkungen

Z.B. gilt

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

mit $a<0$ und m oder n mit geradem Nenner NICHT.

$((-2)^2)^{½} = 2$

$((-2)^2)^{½} = (-2)^{2 \times ½} = -2$

$\Rightarrow 2 = -2$

Es gilt: $(a^m)^n = |a|^{m \times n}$

Also: $((-2)^2)^{½} = (|-2|)^{2 \times ½} = 2$

Fallunterscheidungen

$a^0 = 1$	für alle $a \neq 0$ (Anmerkungen zu „null hoch null" siehe unten)
$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$	für beliebige reelle r, falls $a > 0$ ist; für beliebige rationale r mit ungeraden Nennern, falls $a < 0$ ist.
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	für beliebige natürliche n und ganze m, falls $a > 0$ ist; für beliebige natürliche ungerade n und ganze m, falls $a < 0$ ist.
$a^{r+s} = a^r \cdot a^s$	für beliebige reelle $r,\ s$, falls $a > 0$ ist; für beliebige rationale $r,\ s$ mit ungeraden Nennern, falls $a < 0$ ist.
$a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}$	für beliebige reelle $r,\ s$, falls $a > 0$ ist; für beliebige rationale $r,\ s$ mit ungeraden Nennern, falls $a < 0$ ist.
$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$	für beliebige natürliche r, und für ganze r, wenn $a \cdot b \neq 0$; für beliebige reelle r, falls $a > 0,\ b > 0$ sind; für beliebige rationale r mit ungeraden Nennern, falls mindestens eine der Zahlen $a,\ b$ negativ ist.
$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$	für beliebige ganze r mit $r \geq 0$ und $b \neq 0$ oder $r \leq 0$ und $a \neq 0$; für beliebige reelle r, falls $a > 0,\ b > 0$ sind; für beliebige rationale r mit ungeraden Nennern, falls mindestens eine der Zahlen $a,\ b$ negativ ist.
$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$	für beliebige ganze $r,\ s$, falls $a \neq 0$ ist; für beliebige reelle $r,\ s$, falls $a > 0$ ist; für beliebige rationale $r,\ s$, mit ungeraden Nennern, falls $a < 0$ ist.
$(a^r)^s = -a^{r \cdot s}$	für $a < 0$ und beliebige rationale $r,\ s$, falls r und $r \cdot s$ ungerade Nenner haben und $r \cdot s$ einen ungeraden Zähler hat.

√ als Umkehr*operation*

- √ in der Ω-Notation: Umkehroperation in der 3. Dimension
- Anwendung von Def^ auf rationale Exponenten:

⇒ irreduzible 3. Dimension:

$$S^{\mu 1\overline{\nu 1}}0^{\wedge}S^{\mu 2\overline{\nu 2}}0 \;=_{\text{Def.}\wedge} S^{\,\mu 1\overline{\nu 1}\;\mu 2\overline{\nu 2}}0$$

⇒ irreduzible 1. Dimension:

$$S^{\,\mu 1\overline{\nu 1}\;\mu 2\overline{\nu 2}}0 + S^{\,\mu 3\overline{\nu 3}\;\mu 4\overline{\nu 4}}0 =_{\text{Def.}+} S^{\,\mu 1\overline{\nu 1}\;\mu 2\overline{\nu 2}}S^{\,\mu 3\overline{\nu 3}\;\mu 4\overline{\nu 4}}0$$

⇒ Erweiterung der Definitionen auf Ausdrücke der Form

$$S^{\,\mu_1\overline{\nu_1}\;\mu_2\overline{\nu_2}}\ldots S^{\,\mu_{n-1}\overline{\nu_{n-1}}\;\mu_n\overline{\nu_n}}0$$

Arithmetische Definitionen

Def. +: $S^{\mu_1} \ldots S^{\mu_m} 0 + S^{\nu_1} \ldots S^{\nu_n} 0 = S^{\mu_1} \ldots S^{\mu_m} S^{\nu_1} \ldots S^{\nu_n} 0$

Def. ×: $S^{\mu_1} \ldots S^{\mu_m} 0 \times S^{\nu_1} \ldots S^{\nu_n} 0 = S^{\mu_1 \nu_1} \ldots S^{\mu_1 \nu_n} \ldots S^{\mu_m \nu_1} \ldots S^{\mu_m \nu_n} 0$

DefD. -: $S^{\mu_1} \ldots S^{\mu_m} 0 - (S^{\nu_1} \ldots S^{\nu_n} 0) = S^{\mu_1} \ldots S^{\mu_m} S^{\nu_1} \ldots S^{\nu_n} 0$

Def. ÷: $S^{\mu_1} \ldots S^{\mu_m} 0 \div S^{\nu_1} \ldots S^{\nu_n} 0 = S^{\mu_1 \nu_1} \ldots S^{\mu_1 \nu_n} \ldots S^{\mu_m \nu_1} \ldots S^{\mu_m \nu_n} 0$

Def. ^: $S^{\mu_1} \ldots S^{\mu_m} 0^{\wedge S^{\nu_1} \ldots S^{\nu_n} 0} = S^{\mu_1 \ldots \mu_m{}^{\nu_1 \ldots \nu_n}} 0$

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2$

I. Analyse von $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}}$:

1. $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$: $S^{(SS0\,\overline{S0})^{S0\,\overline{SS0}}\,(SS0\,\overline{S0})^{S0\,\overline{SS0}}}0.$

2. Umformung $(Z1,\ Def.^{S},\ Def.^{0})$: $S^{(SS0\,\overline{S0})\,\overline{SS0}\,(SS0\,\overline{S0})\,\overline{SS0}}0.$

3. Vereinfachung (R3,R2,Z1,Z2,Z1): $\left(S^{\overline{S0}}\right)^{(SS0\,SS0)^{\overline{SS0}}}0.$

4. Vereinfachung $(Def.^{0},\ Def.^{S})$: $\left(S^{\overline{S0}}\right)^{SS0^{SS0\,\overline{SS0}}}0.$

5. Vereinfachung (U3): $\left(S^{\overline{S0}}\right)^{SS0}0.$

6. Umformung (Z1, R2): $S^{SS0\,\overline{S0}}\,0.$

II. Analyse von 2:

2: $S^{SS0\,\overline{S0}}\,0.$

Mehrdeutigkeit

$\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2$

I. Analyse von $\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$:

1. $2 : S^{SS0\,\overline{S0}}\,0.$
2. $-2(\text{DefM-}, \text{Def}^{S}\,\text{Def}^{0}) : S^{\overline{S}\,\overline{S}\,0\,\overline{S0}}0.$
3. $(-2)^2\left(\text{Def}\,\text{\textasciicircum}, \text{Def}^{\overline{S}}, \text{Def}^{0}, \text{Z2}, \text{R2}\right) : S^{SSSS0\,\overline{S0}}0.$
4. $(-2)^2\left(\text{R1}, \text{Def}^{S}, \text{Def}^{0}, \text{R2}, \text{Z1}\right) : S^{SS0\,\overline{S0}^{SS0}}\,0.$
5. $\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}(\text{Def\textasciicircum}, \text{Z1}, \text{Z2}, \text{U3}) : S^{SS0\,\overline{S0}}0.$

$\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}} = -2$

II. Analyse von $\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$:

1. $2 : S^{SS0\,\overline{S0}}\,0.$
2. $-2(\text{DefM-}, \text{Def}^{S}\,\text{Def}^{0}) : S^{\overline{S}\,\overline{S}\,0\,\overline{S0}}0.$
3. $(-2)^2\,(\text{Def}\,\text{\textasciicircum}) : S^{\overline{S}\,\overline{S}\,0\,\overline{S0}^{SS0\,\overline{S0}}}\,0.$
4. $\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}\,(\text{Def.\textasciicircum}, \text{Z3}, \text{Z1}) : S^{\overline{S}\,\overline{S}\,0\,\overline{S0}^{SS0\,\overline{S0}\,\overline{S0}\,SS0}}\,0$
5. $\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}(\text{R2}, \text{U3}) = S^{\overline{S}\,\overline{S}\,0\,\overline{S0}}\,0.$

$\Rightarrow$ Unterschiedliche Rechenwege: unterschiedliche Ergebnisse

Kritische Anwendungen

- U3 in der 3. Dimension, wenn Mehrdeutigkeit von φ durch Bilden oder Kürzen nicht teilerfremder Exponenten verändert wird. Z.B. im Beweis von

$$((-2)^2)^{(1/2)} = 2$$

- R2 in der 3. Dimension, insofern dadurch die Reihenfolge der Anwendung von nicht teilerfremden Zählern und Nennern vertauscht wird. Z.B. im Beweis von

$$((-2)^2)^{(1/2)} = ((-2)^{(1/2)})^2$$

In kritischen Anwendungen bleiben Mehrdeutigkeiten nicht erhalten.

E- und A-Paraphrase

E-Paraphrase: Rechenweg involviert kritische Anwendungen.

Der Beweis einer Gleichung der Form $\varphi_l = \varphi_r$ heißt:

Für *einige* Deutungen von φ_l und φ_r gilt $\varphi_l = \varphi_r$

Z.B.:

Es gibt eine Deutung von $((-2)^2)^{(1/2)}$ und 2, so dass $((-2)^2)^{(1/2)} = 2$.

A-Paraphrase: Rechenweg involviert keine kritischen Anwendungen.

Der Beweis einer Gleichung der Form $\varphi_l = \varphi_r$ heißt:

Für *alle* Deutungen von φ_l und φ_r gilt $\varphi_l = \varphi_r$

Transitivität?

$$-2 = (-2)^{2/2} = (-2^2)^{1/2} = 2$$

Für eine Deutung von -2 und $(-2)^{2/2}$ gilt: $-2 = (-2)^{2/2}$

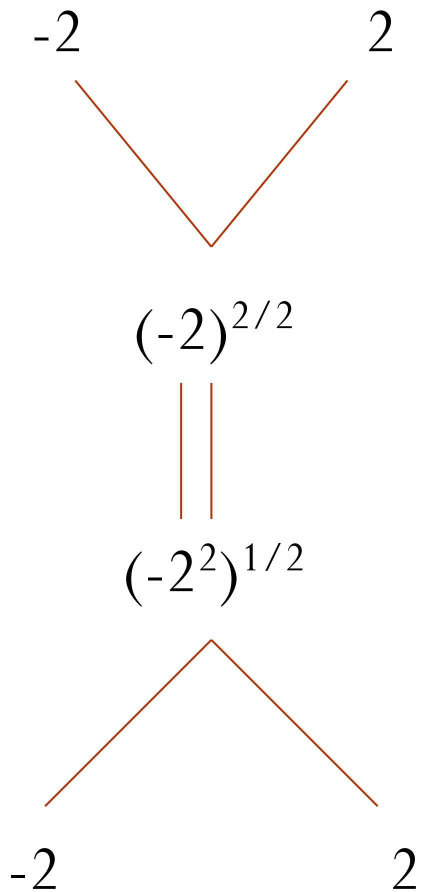
Für alle Deutungen von $(-2)^{2/2}$ und $(-2^2)^{1/2}$ gilt: $(-2)^{2/2} = (-2^2)^{1/2}$

Es gibt eine von -2 und $(-2)^{2/2}$ gilt: $(-2^2)^{1/2} = 2$

$\Rightarrow$ -2 und 2 sind zwei Deutungen von $(-2)^{2/2}$ bzw. $(-2^2)^{1/2}$: $\{-2,2\}$.

$\Rightarrow$ Äquivalenzumformungen bezüglich Elementen von Listen von Wurzeln: $\sqrt{4} = \{-2,2\}$.

Rechenbaum



Potenzgesetze

- Es folgt jeweils aus dem Beweis, ob das Gesetz im Sinne der E-Paraphrase oder der A-Paraphrase gilt.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

gilt z.B. im Sinne der A-Paraphrase für

$$(a^{1/2})^{1/3} = a^{1/2 \times 1/3} = a^{1/6}$$

und im Sinne der E-Paraphrase für

$$(a^{2/1})^{1/2} = a^{2/2 \times 1/2} = a$$

Potenzgesetze 1: $(a^m)^n = a^{m \times n}$

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}$$

I. Analyse von $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$:

1. $2^{\frac{1}{2}}$: $S^{SS0\,\overline{S0}^{S0\,\overline{SS0}}}0.$
2. $\frac{1}{3}$: $S^{S0\,\overline{SSS0}}0.$
3. $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ (Def.$_a$^): $S^{\left(S^{SS0\,\overline{S0}^{S0\,\overline{SS0}}}\right)^{S^{S0\,\overline{SSS0}}}}0.$
4. Vereinfachung (Z3, Z1, Def.^{S}, Def.^{0}): $S^{SS0\,\overline{S0}^{S0\,\overline{SS0}\,\overline{SSS0}}}0.$
5. Umformung (U1,R1,Z3): $S^{SS0\,\overline{S0}^{S^{S0\,\overline{S^{SS0SSS0}}}}}0.$
6. Vereinfachung (Z1, Def.^{S}, Def.^{0}, R1): $S^{SS0\,\overline{S0}^{S0\,\overline{SSSSSS0}}}0.$

II. Analyse von $2^{\frac{1}{6}}$:

1. $2^{\frac{1}{6}}$:$S^{SS0\,\overline{S0}^{S0\,\overline{SSSSSS0}}}0.$

Potenzgesetze 2: $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

$2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}}$

I. Analyse von $2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}$:

1. $2^{\frac{1}{2}} : S^{SS0\,\overline{S0}^{S0\,\overline{SS0}}}0.$
2. $3^{\frac{1}{2}} : S^{SSS0\,\overline{S0}^{S0\,\overline{SS0}}}0.$
3. $2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} :\ S^{SS0\,\overline{S0}^{S0\,\overline{SS0}}\ SSS0\,\overline{S0}^{S0\,\overline{SS0}}}0.$
4. Vereinfachung (R3,R2): $S^{SS0\ \ SSS0\,\overline{S0}\ \overline{S0}^{S0\,\overline{SS0}}}0.$
5. Vereinfachung (R1, U1, Z3): $S^{S^{SS0\,SSS0\,\overline{S^{S0\ S0}}}{}^{S0\,\overline{SS0}}}0.$
6. Verfeinfachung $\left(\text{Z1},\ \text{Def.}^{S},\ \text{Def.}^{0}\text{R1}\right)$: $S^{SSSSSS0\,\overline{S0}^{S0\,\overline{SS0}}}0.$

II.Analyse von $6^{\frac{1}{2}}$:

1. $6^{\frac{1}{2}} : S^{SSSSSS0\,\overline{S0}^{S0\,\overline{SS0}}}0.$

Potenzgesetze 3: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 32^{\frac{1}{6}}$

I. Analyse von $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}}$:

1. $2^{\frac{1}{2}}$: $S^{(\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\mathrm{S0}\,\overline{\mathrm{SS0}}}}0.$

2. $2^{\frac{1}{3}}$: $S^{(\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\mathrm{S0}\,\overline{\mathrm{SSS0}}}}0.$

3. $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}}$: $S^{(\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\mathrm{S0}\,\overline{\mathrm{SS0}}}\,(\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\mathrm{S0}\,\overline{\mathrm{SSS0}}}}0.$

4. Erweiterung (U3): $S^{(\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\mathrm{S0}\,\overline{\mathrm{SS0}}\,\mathrm{SSS0}\,\overline{\mathrm{SSS0}}}\,(\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\mathrm{S0}\,\overline{\mathrm{SSS0}}\,\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{SS0}}}}0.$

5. Vereinfachung (R2, R1, U1, Z3): $S^{(\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\mathrm{S0}\,\mathrm{SSS0}\,\overline{S^{\mathrm{SS0}\,\mathrm{SSS0}}}}\,(\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\mathrm{S0}\,\mathrm{SS0}\,\overline{S^{\mathrm{SS0}\,\mathrm{SSS0}}}}}0.$

6. Vereinfachung (Z1, Def.^{S}, Def.^{0}, R1): $S^{\left((\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\mathrm{S0}\,\mathrm{SSS0}}\right)^{\overline{\mathrm{SSSSSS0}}}\left((\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\mathrm{S0}\,\mathrm{SS0}}\right)^{\overline{\mathrm{SSSSSS0}}}}0.$

6. Vereinfachung (R3): $S^{\left((\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\mathrm{S0}\,\mathrm{SSS0}}(\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\mathrm{S0}\,\mathrm{SS0}}\right)^{\overline{\mathrm{SSSSSS0}}}}0.$

7. Vereinfachung $\left(\mathrm{Z1},\ \mathrm{Def}^S,\ \mathrm{Def.}^0,\ \mathrm{R1}\right)$: $S^{(\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}}\,\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}}\,\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}}\,\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}}\,\mathrm{SS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\overline{\mathrm{SSSSSS0}}}}0.$

8. Vereinfachung $\left(\mathrm{R2},\ \mathrm{Z1},\ \mathrm{Def.}^S,\ \mathrm{Def.}^0,\ \mathrm{R1},\ \mathrm{Z2}\right)$: $\mathrm{SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS}\ \overline{\mathrm{S0}}^{\overline{\mathrm{SSSSSS0}}}0.$

9. Vereinfachung $\left(\mathrm{Def.}^0,\ \mathrm{Def.}^S,\ \mathrm{Z1}\right)$: $S^{(\mathrm{SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\overline{\mathrm{SSSSSS0}}}}0.$

II. Analyse von $32^{\frac{1}{6}}$:

1. $32^{\frac{1}{6}}$: $S^{(\mathrm{SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS0}\,\overline{\mathrm{S0}})^{\overline{\mathrm{SSSSSS0}}}}0.$

Desambiguierungs-Algorithmus

$$\varphi =_{\text{Def.}} \begin{array}{c} [\varphi^*]_1 \\ \vdots \\ [\varphi^*]_n \end{array}$$

φ Sei von der Form $a^{(m/n)}$ (m,n teilerfremd).

1. Wie sind die zusammengesetzten Regeln zu definieren, die festlegen, wie die primitiven Regeln anzuwenden sind, um alle primitiven Radikale zu konstruieren?
2. Was sind die primitiven Radikale?

Priorität der Wurzeln

- Heuser, Lehrbuch der Analysis I, S. 78:

Zur Definition der p-ten Wurzel machen wir noch einige B e m e r k u n g e n.

1. *$\sqrt[p]{a}$ ist nur für $a \geqslant 0$ definiert, und es ist immer $\sqrt[p]{a} \geqslant 0$; insbesondere ist $\sqrt{a} \geqslant 0$.* Speziell: Es ist $\sqrt{4} = 2$, nicht jedoch $= -2$. Ganz unsinnig ist eine „Gleichung" der Form $\sqrt{4} = \pm 2$.

2. Die Aufgabe, $\sqrt[p]{a}$ zu berechnen, ist scharf zu unterscheiden von dem Problem, *sämtliche reellen Lösungen der Gleichung $x^p = a$ zu finden.* Ist $a > 0$, so liefert $\sqrt[p]{a}$ *eine*, und zwar eine *positive* Lösung dieser Gleichung.

Alternative: Implizite Definition von $\sqrt[p]{a}$ über Gleichungen $x^p = a$.

Priorität der Gleichungen

„‘What does it mean to solve a polynomial equation system?‘ […] we could say that ‚*the solutions of* $f(X)=X^2-2$ *are* $\sqrt{2}$ *and* $-\sqrt{2}$‘.

Yes, yes, … unless somebody asks you for a definition of $\sqrt{2}$ … Well, whatever approach you use, your only possible answer is: ‚$\sqrt{2}$ *and* $-\sqrt{2}$ *are the solutions of* X^2-2‘. Apparently, we have a strange tautology: *the solutions of* X^2-2 *are the solutions of* X^2-2*!*

If you are not really convinced by this, let me try a stronger example: you will agree that the solutions of the polynomial $X^2 + 1$ are $\pm$ i and that the imaginary number i can be defined only as that number whose square is -1, i.e. to be a solution of the polynomial X^2+1. So we have a tautology:

The solutions of the polynomial equation $X^2+1=0$ *are the two solutions of the polynomial equation* $X^2+1=0$.“

Mora, *Solving Polynomial Equation Systems,* 2003, S. 47.

Linearfaktorzerlegung

1. $a^{(m/n)} \Rightarrow x^n = a^m$
2. $x^n = a^m \Rightarrow x^n - a^m = 0$
3. Kronecker-Algorithmus der Linearfaktorzerlegung: Eindeutige Zerlegung in n-Faktoren *ohne Verwendung von Wurzeln*!
   a) Reduktion auf in $\mathbb{Q}$ irreduzibles Polynom.
   b) Sukzessive Faktorisierung über $\mathbb{Q}(\alpha_i)$.

Antworten

1. Wie sind die zusammengesetzten Regeln zu definieren, die festlegen, wie die primitiven Regeln anzuwenden sind, um alle primitiven Radikale zu konstruieren? $\Rightarrow$ Kronecker-Algorithmus
2. Was sind die primitiven Radikale? $\Rightarrow$Subtrahend der Linearfaktorzerlegung im Kronecker-Algorithmus

Beispiel: √2

$\sqrt{2}$

1. $\sqrt{2}$ $=_{\mathbf{Def}}$ $x^2 = 2$
2. $x^2 = 2 =_{\mathbf{Def}}$ $x^2 - 2 = 0$

3 a. Faktorisierung über $\mathbb{Q}$:

```
Factor[X^2 - 2]
```

$-2 + X^2$

3b.: Faktorisierung über Q[α1]:

```
splittingfields[X^2 - 2]
```

Define[α1 hoch 2 , 2] and factorization :

$(X - \alpha 1)\ (X + \alpha 1)$

We had to make 1 extensions before the polynomial finally split.

$\{-2 + X^2,\ (X - \alpha 1)\ (X + \alpha 1)\}$

Mora, Solving Polynomial Equation Systems I, S. 158

„Consider $f := X^2 - 2$: then the field […] $\mathbb{Q}[\alpha]$ has two roots of $f(X)$, which are α and $-\alpha$. Which of them is $\sqrt{2}$?

[…] $\mathbb{Q}[\alpha]$ represents both $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ and $\mathbb{Q}[-\sqrt{2}]$ […]; in the first representation $\sqrt{2}$ is represented by α, while in the second one it is represented by $-\alpha$!

This is not at all strange, no more than the fact that there is no way that the two imaginary numbers can be distinguished from each other […]

However, the existence of these two automorphic models of $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, and therefore of these two ways of interpreting Kronecker's representation $\mathbb{Q}[\alpha]$ of it, has the following consequence: how can we produce a program which allows us to decide whether a given arithmetical expression is positive?“

Lokalisierung: $\mathfrak{I}(\varphi)$

- Kronecker‘s α‘s sind nicht lokalisiert: ob $\alpha > 0$ ist, ist unentscheidbar. Ihre Lokalisierung, z.B. durch Wurzelausdrücke im Sinne eindeutiger Funktionsausdrücke, gehört zur *Interpretation* des Kalküls (so wie Wahrheitswerte zur Interpretation der Aussagenlogik gehören)!
- Die Linearfaktorzerlegung gibt allein formale (strukturelle) Beziehungen der Deutungen / Lösungen - inkl. Anzahl der verschiedenen Deutungsmöglichkeiten - von φ wieder.
  - $\Rightarrow$Wenn *ein* Linearfaktor interpretiert wird, folgt die Interpretation der restlichen festgelegt (analog zur Interpretation der a- und-b Pole).
  - $\Rightarrow$Formale Beziehungen definieren Interpretations*möglichkeiten*.

Beispiel: $^3\sqrt{1}$

```
1^(1/3)
```

1

1^(1/3)

1. 1^(1/3) $=_{\text{Def.}}$ $x^3 = 1$
2. (x^3) $=_{\text{Def}}$ $x^3 - 1 = 0$

3a. Faktorisierung über Q:

```
Factor[X^3 - 1]
```

$(-1 + X)\ (1 + X + X^2)$

3b. Faktorisierung über Q[α1]:

```
splittingfields[(1 + X + X^2)]
```

```
Define[α1 hoch 2 , -1 - α1] and factorization :
```

$(X - \alpha1)\ (1 + X + \alpha1)$

```
We had to make 1 extensions before the polynomial finally split.
```

$\{1 + X + X^2,\ (X - \alpha1)\ (1 + X + \alpha1)\}$

Resultat:
$\{X^3 - 1,\ (X - 1)\ (X - \alpha1)\ (X + 1 + \alpha1)\}$

Lokalisierung: Radikale

```
Solve[x^3 - 1 == 0, x]
```

$$\{\{x \to 1\}, \{x \to -(-1)^{1/3}\}, \{x \to (-1)^{2/3}\}\}$$

```
Factor[x^3 - 1]
```

$$(-1 + x)\,(1 + x + x^2)$$

```
x^2 + x + 1 == 0
```

p/q-Formel ($x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$):

$$\left\{\left\{x \text{ -> } \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}\ I\right)\right\}, \left\{x \text{ -> } \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\ I\right)\right\}\right\}$$

Das Polynom x^3-1 zerfällt folglich in:

$$\left\{\{x \to 1\}, \left\{x \text{ -> } \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}\ I\right)\right\}, \left\{x \text{ -> } \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\ I\right)\right\}\right\}$$

Äquivalenzklassen

- Im Ω-Kalkül beweisbar unter Voraussetzung der Wurzeloperation ist mittels kritischer Anwendungen:

$$-(-1)^{1/3} = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\ I\right) = (-1)^{2/3} = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\ I\right)$$

- Es gilt: $\{X^3 - 1,\ (X-1)\ (X-\alpha 1)\ (X+1+\alpha 1)\}$
- Es ist unentscheidbar, welcher Wert α1 ist, denn es gilt:

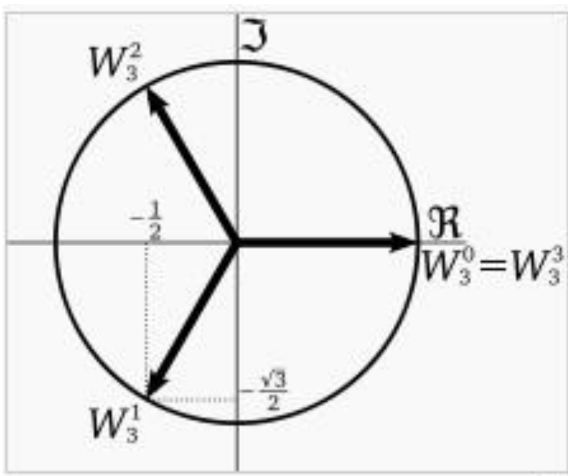
$$\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\ I\right) = -1-\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\ I\right) \quad , \quad \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\ I\right) = -1-\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\ I\right)$$

- Im Ω-Kalkül nicht entscheidbar ist:

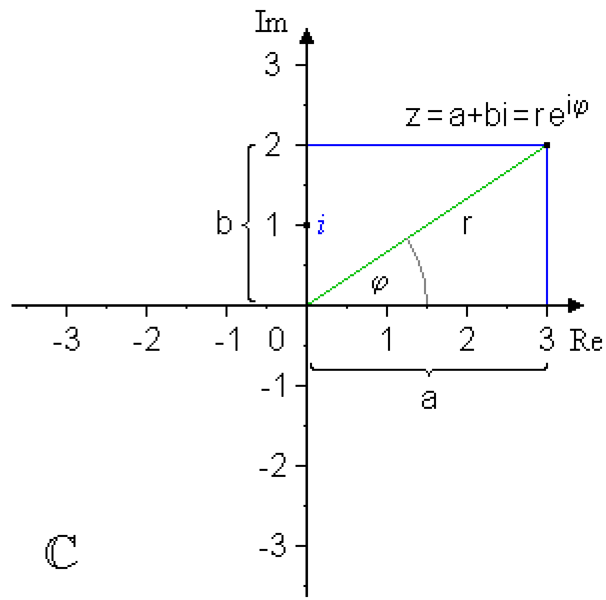
$$\left\{\left\{\alpha 1,\ -(-1)^{1/3},\ \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\ I\right)\right\},\ \left\{-1-\alpha 1,\ (-1)^{2/3},\ \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\ I\right)\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{\alpha 1,\ (-1)^{2/3},\ \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\ I\right)\right\},\ \left\{-1-\alpha 1,\ -(-1)^{1/3},\ \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\ I\right)\right\}\right\}$$

Lokalisierung: Komplexe Ebene



Die dritten Einheitswurzeln



Lokalisierung: Algebraische Form

- Algebraische Form: $a + b \times i$
- Rationale Approximation mittels Newton-Iteration:

```
NSolve[x^3 - 1 == 0, x]

{{x → -0.5 - 0.866025 i}, {x → -0.5 + 0.866025 i}, {x → 1.}}
```

- http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e0/NewtonIteration_Ani.gif

Lokalisierung: Polarform

$$z = r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$$

- Exponential-Form:

```
{{x → E^(I*0*Pi)}, {x → E^(I*1/3*2 Pi)}, {x → E^(I*2/3*2 Pi)}}
```

- Trigonometrische Form

```
{{x → Cos[0] + I * Sin[0]},
 {x → Cos[1 / 3 * 2 * Pi] + I * Sin[1 / 3 * 2 * Pi]},
 {x → Cos[2 / 3 * 2 * Pi] + I * Sin[2 / 3 * 2 * Pi]}}
```

φ als Operationsausdruck

- Kein Funktionsausdruck $\Rightarrow$ keine Forderung der Eindeutigkeit $\Rightarrow$ keine Einschränkung eines Def.bereiches
- Kein Widerspruch, sondern Mehrdeutigkeit
- Umkehrung von ^ konstruiert *Zahlen*, die mit sich selbst mal genommen, eine bestimmte Zahl ergeben.

$\Rightarrow$ Mehrdeutigkeit in Operationen begründet (nicht in propositionalen Funktionen)

$\Rightarrow$ Potenzgesetze und ihre Anwendbarkeit folgen aus Ω-Regeln

$\Rightarrow$ Realisierung der algorithmischen Analyse durch Linear-Faktorzerlegung des Kronecker-Algorithmus

$\Rightarrow$ Lokalisierung als Interpretation

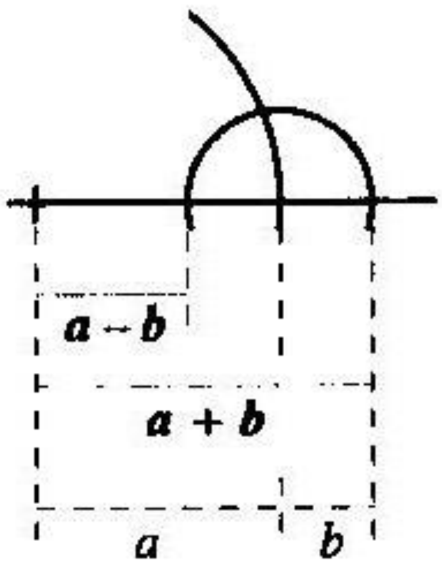
Geometrische Unmöglichkeitsbeweise

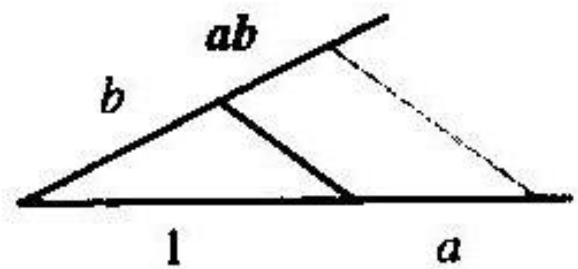
Beispiel: Konstruktion regelmäßiger Polygone

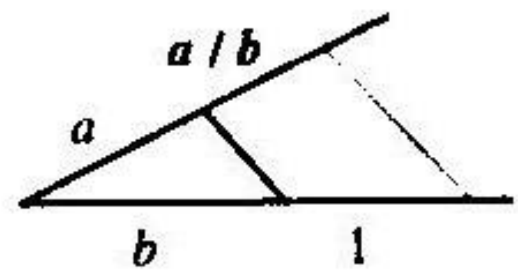
1. Übersetzung der geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in Radikale vom Grad 2.
2. Entscheidung der Konstruktionsmöglichkeit regelmäßiger n-Ecke (Polygone) anhand der Darstellbarkeit der n-ten Einheitswurzeln durch Radikale vom Grad 2 anhand der Berechnung der Dimension im Kronecker-Algorithmus.

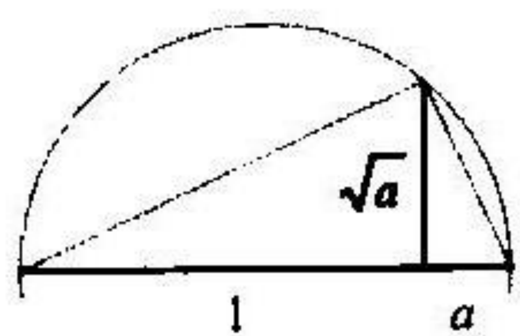
$\Rightarrow$ Die *Möglichkeit* der Konstruktion wird gemessen an der *formalen Eigenschaft* der Dimension der α‘s im Kronecker-Algorithmus.

Geometrische Konstruktion und Radikale 2.ten Grades

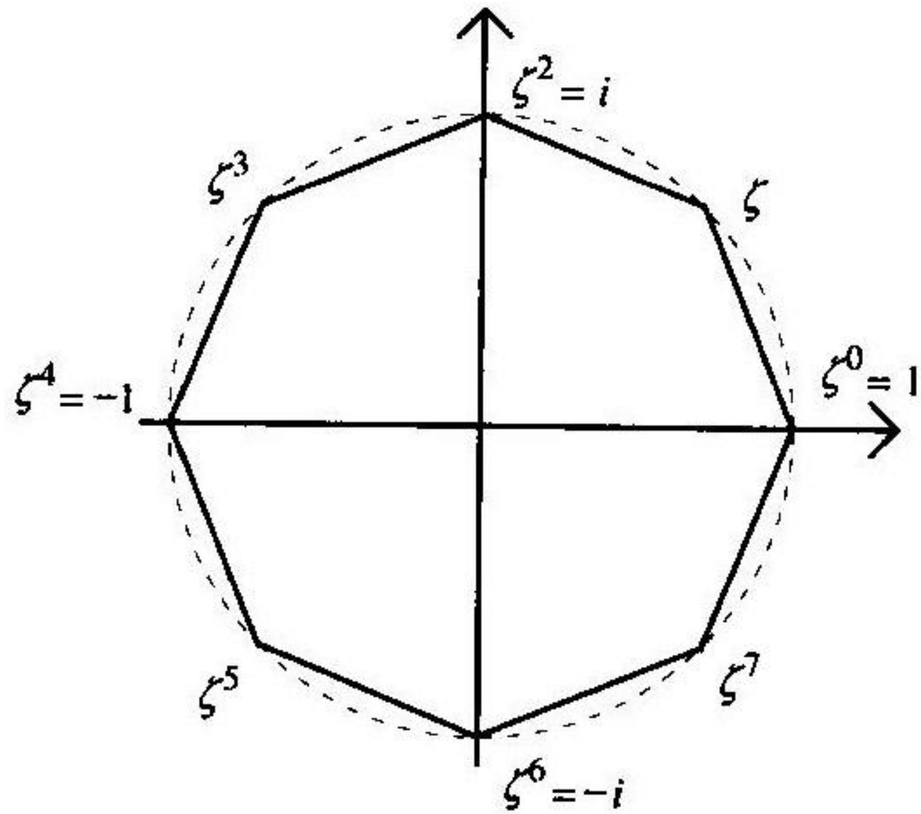








n-Ecke und Einheitswurzeln



Syntaktisches Kriterium

- Ausgehend von der Strecke von (0,0) nach (1,0) als „UrMaßstab“ kann ein Punkt der Ebene genau dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn seine beiden Koordinaten ausschließlich durch rationale Zahlen und mehrfach geschachtelte Quadratwurzeln mit rationalen Radikanden dargestellt werden können.
- Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Dimension der Einheitswurzel eine 2er Potenz ist.
- Dimension = Produkt der Potenzen von α_1-α_n in den Erweiterungsschritten des Kronecker-Algorithmus.

Beweis: 5-Eck

```
Factor[X^5 - 1]
```

$(-1+X)\left(1+X+X^2+X^3+X^4\right)$

```
splittingfields[1 + X + X^2 + X^3 + X^4]
```

Define[$\alpha 1$ hoch 4 , $-1-\alpha 1-\alpha 1^2-\alpha 1^3$] and factorization :

$(X-\alpha 1)\left(X-\alpha 1^2\right)\left(X-\alpha 1^3\right)\left(1+X+\alpha 1+\alpha 1^2+\alpha 1^3\right)$

We had to make 1 extensions before the polynomial finally split.

$\left\{1+X+X^2+X^3+X^4,\ (X-\alpha 1)\left(X-\alpha 1^2\right)\left(X-\alpha 1^3\right)\left(1+X+\alpha 1+\alpha 1^2+\alpha 1^3\right),\ 4\right\}$

Beweis: 7-Eck

```
Factor[X^7 - 1]
```

$(-1+X)\left(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6\right)$

```
splittingfields[1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6]
```

Define[$\alpha1$ hoch 6, $-1-\alpha1-\alpha1^2-\alpha1^3-\alpha1^4-\alpha1^5$] and factorization :

$(X-\alpha1)\left(X-\alpha1^2\right)\left(X-\alpha1^3\right)\left(X-\alpha1^4\right)\left(X-\alpha1^5\right)\left(1+X+\alpha1+\alpha1^2+\alpha1^3+\alpha1^4+\alpha1^5\right)$

We had to make 1 extensions before the polynomial finally split.

$\left\{1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6,\ (X-\alpha1)\left(X-\alpha1^2\right)\left(X-\alpha1^3\right)\left(X-\alpha1^4\right)\left(X-\alpha1^5\right)\left(1+X+\alpha1+\alpha1^2+\alpha1^3+\alpha1^4+\alpha1^5\right),\ 6\right\}$

Systematik

n	Dim.	Formel	±
3	2	$2^0 \cdot 3$	+
4	2	2^2	+
5	4	$2^0 \cdot 5$	+
6	2	$2^1 \cdot 3$	+
7	6		-
8	4	2^3	+
9	6		-
10	4	$2^1 \cdot 5$	+

n	Dim.	Formel	±
11	10		-
12	4	$2^2 \cdot 3$	+
13	12		-
14	6		-
15	8	$2^0 \cdot 3 \cdot 5$	+
16	8	2^4	+
17	16	$2^0 \cdot 17$	+

A003401 Numbers of edges of regular polygons constructible with ruler and compass. +40 20
(Formerly M0505)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272, 320, 340, 384, 408, 480, 510, 512, 514, 544, 640, 680, 768, 771, 816, 960, 1020, 1024, 1028, 1088, 1280, 1285 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

Geometrische Unmöglichkeitsbeweise

- Der geometrische Unmöglichkeitsbeweis beweist anhand der formalen Eigenschaften der Einheitswurzeln, z.B. $\sqrt[7]{1}$, dass eine *Interpretation* in Form einer geometrischen Konstruktion mit Zirkel und Lineal *nicht möglich* ist.
- Die Frage der *Möglichkeit* einer Konstruktion wird anhand der *formalen* Eigenschaften der algebraischen Ausdrücke *entschieden*.

$\Rightarrow$ Kein Widerspruchsbeweis, sondern konstruktiver Beweis für Möglichkeit und Unmöglichkeit der Konstruktion von regelmäßigen n-Ecken durch Entscheidung anhand eines syntaktischen Kriteriums.